Лекция №2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Обратная матрица. Ранг матрицы.

Определение. Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что выполняется равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Определение. Квадратная матрица A, определитель которой равен нулю, называется вырожденной, матрица, определитель которой не равен нулю, называется невырожденной.

Пример 1. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ – вырождена, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – невырождена. Из соотношения $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ следует, что у вырожденной матрицы не может быть обратной $\left(0 \cdot |A^{-1}| \neq 1\right)$.

Определение. Присоединенной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица $\tilde{A}$, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, т.е.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \dots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема об обратной матрице. Невырожденные матрицы и только они имеют обратные матрицы, которые находятся по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^{\mathrm{T}}$.

(Здесь $\tilde{A}^{\mathrm{T}}$ – присоединённая транспонированная матрица).

Ранг матрицы. Рассмотрим одну числовую характеристику любой (необязательно квадратной) матрицы. Ранг матрицы определяет число так называемых базисных строк или столбцов матрицы, через которые с помощью линейных операций можно получить все остальные строки или столбцы матрицы.

Определение. Минором k-го порядка матрицы A называется определитель, составленный из элементов стоящих на пересечении произвольно выбранных k-столбцов и k - строк этой матрицы.

Определение. Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Он обозначается символом $r(A)$ или $rangA$. $r(A)$ – целое неотрицательное число, не превосходящее числа строк и столбцов матрицы A. Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Для нахождения $r(A)$ формально необходимо рассмотреть все миноры A, начиная с 1-го порядка и проверить их на вырожденность.

Метод окаймляющих миноров позволяет сократить эту процедуру. Он состоит в следующем. Выбираем любой невырожденный минор 1-го порядка (ненулевой элемент матрицы A). Обозначим его через M_1. Затем рассматриваем все миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие его). Если все они вырождены, то $r(A) = 1$, если нет, то невырожденный минор 2-го порядка обозначаем через M_2 и так далее. Если у матрицы A есть невырожденный минор k-го порядка и все окаймляющие его миноры (если они есть) вырождены, то $r(A)=k$, иначе выбираем минор M_{k+1} и продолжаем этот процесс.

Пример. Найдем ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. У матрицы выбираем невырожденный минор 1-го порядка $M_1=(a_{11})=1$. Среди окаймляющих его миноров есть один невырожденный $M_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$. Единственный минор 3-го порядка окаймляющий M_2 – это сама матрица A. Но, поскольку $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0$, то A – вырождена и $r(A)=2$.

Рассмотрим еще один метод нахождения $r(A)$, который называется методом элементарных преобразований или методом Гаусса.

Элементарными преобразованиями для матрицы A называются следующие ее преобразования.

1. Перестановка строк или столбцов местами.
2. Умножение строки или столбца на ненулевой коэффициент.
3. Прибавление к одной строке или столбцу матрицы другой её строки или столбца, умноженной на некоторое число k.
4. Зачеркивание нулевой строки или столбца матрицы.

Матрица B, полученная из A с помощью элементарных преобразований, называется эквивалентной ей и обозначается в виде $A\sim B$.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема. Ранг треугольной матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Определение. Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь переменные $x_1, x_2,..., x_n$ называются неизвестными системы, числа a_{ij}, где $i=1, 2,..., m$ $j=1, 2,..., n$ называются коэффициентами системы, а числа $b_1, b_2,..., b_m$ – свободными членами.

Числа $x_1, x_2,..., x_n$ обращающие все уравнения системы в тождества, называются решением системы. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Имеется более краткая запись С.Л.А.У., она состоит в следующем.

Обозначаем через А матрицу размера $m \times n$, составленную из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Она называется матрицей системы. Столбец свободных членов обозначим через

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$, а столбец из неизвестных системы через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда систему (1.1) можно записать в виде матричного уравнения: $AX = B$.

Эта запись называется матричной формой записи системы.

В случае, если матрица A квадратная, матричная форма записи позволяет решить систему с использованием обратной матрицы A^{-1}.

Теорема. С.Л.А.У., имеющая квадратную невырожденную матрицу, имеет единственное решение, которое находится по формуле: $X = A^{-1}B$.

Доказательство. Умножим обе части равенства $AX = B$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, отсюда $EX = A^{1}B$ и $X = A^{1}B$.

Метод решения С.Л.А.У. с использованием соотношения $X = A^{1}B$ называется матричным методом решения.

Пример. Решим систему $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ матричным методом. Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – невырожденная, $|A| = -2$. Найдем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^{\mathrm{T}} = \ = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Для данной системы $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, поэтому $X = A^{-1}B = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 11 \\ -3 \cdot 5 + 1 \cdot 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Следовательно $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Данный метод решения систем можно записать и в несколько ином виде, который называется правилом Крамера.

Следствие. Пусть С.Л.А.У. имеет квадратную матрицу A n-го порядка, $|A| = \Delta \neq 0$. Пусть Δ_i – определитель матрицы системы, в которой вместо i-го столбца подставлен столбец свободных членов. Тогда эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = \overline{1,n}$. Эти формулы называются формулами Крамера.

Пример. Решим систему $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ по правилу Крамера. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 11 = -2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - 5 \cdot 3 = -4.$

Поэтому: $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ x = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \end{cases}.$

Метод Гаусса для исследования и решения С.Л.А.У. Матричный метод и правило Крамера обладают двумя существенными недостатками. Во первых, они применимы только для систем с невырожденной квадратной матрицей и не работают в случае, когда $\Delta = 0$. Во вторых, с ростом n объём вычислений для этих методов слишком быстро возрастает и для $n > 10$ они уже практически неприменимы. Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать метод Гаусса.

Исследовать систему – это значит определить совместна ли она и, в случае совместности, определить, сколько решений она имеет.

Определение. Расширенной матрицей С.Л.А.У. называется матрица, полученная из матрицы системы приписыванием справа столбца свободных членов системы.

Пример. Исследовать и решить систему $\begin{cases} y + 2z = 3 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$. Запишем и приведем к верхнетреугольному виду матрицу $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \hookleftarrow^{(-1)} \hookleftarrow_{(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \hookleftarrow_{(-1)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

т.к. $r(\overline{A}) = r(A) = 3$ система совместна и имеет единственное решение. По последней матрице восстанавливаем систему и решаем ее, начиная с последнего уравнения.

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \\ y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Основная литература**:** [6] § 1,3 стр. 12-42, стр. 66-83

Дополнительная литература: [19] Глава 1.8- 1.12, 1.14 стр. 52-58, 72-83, 87-94

Контрольные вопросы

1. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений?

2. Матричный способ решения систем линейных уравнений. Когда он применяется?
3. Что называется рангом матрицы?
4. Какой цели служит ранг матрицы?